

同時方程式トービットモデルを用いた 為替介入の政策評価 *

赤司健太郎[†] 清水順子[‡] 村越雅司[§]

2015年4月

要旨

本稿の目的は、2003年1月から2004年3月にかけて大規模に行われた日本の為替介入の効果について検証を試みることである。本稿の特徴は、介入金額をオーダーフローの一部として捉え、当局と市場の2つの反応式を同時方程式トービットモデルによって定式化したことにある。構造式は完全情報最尤推定し、誘導型からこのモデルの平均処置効果を得た。提案する検定から介入の内生性が示唆されるが、1兆円の円売り介入によって当日中に1円以上の円安誘導を実現していたと考えられる。これは回帰分析の結果の2倍から3倍に当たる効果である。介入を実施した日には介入が無かった場合の反事実と比べ、円の増価トレンドをほぼ相殺していたという政策効果があった。

キーワード: 為替介入、オーダーフロー、同時方程式トービット、FIML 推定量、内生性の検定、Average Treatment Effect

JEL Classification: F31, C34, C54

1 はじめに

為替介入の効果に対する検証はこれまで様々な考え方や手法の下で行われてきた。1970年代から80年代前半においてはJurgensen Report (1983) に代表されるように、不胎化された介入が為替相場に与える影響について懐疑的な見解が強かった。しかし、1985年9月のプラザ合意以降に主要先進国の中央銀行が大規模な協調介入を実施したことにより、それ以降の研究は不胎化介入の効果としてシグナリング効果に着目した分析が多い。大規模な介入、特に複数の先進国が同時に市場に介入する協調介入によって将来の為替相場に対する大きな変化を市場参加者が予想し、行動するというシグナリング効果により、不胎化介入にも一定の効果

*ASM15-4-3. 伊藤隆敏教授(コロンビア大学)には、2014年度日本金融学会においてご討論と貴重なご助言を頂いた。田中勝人教授(学習院大学)と福地純一郎教授(学習院大学)並びに2014年度日本統計学会の出席者の方々からは有益なご指摘を頂いた、ここに感謝する。なお、本研究は日本学術振興会の科研費(25330049)の助成によっている。

[†]学習院大学経済学部 kentaro.akashi@gakushuin.ac.jp

[‡]学習院大学経済学部 junko.shimizu@gakushuin.ac.jp

[§]株式会社クロスキャット

があることが実証された。この時期に日本の財務省が行った為替介入の円相場に対する効果を扱った論文として、渡辺 (1992) は 1973 年から 1992 年までのデータを用いてベイジアン推定を行い、為替介入に効果があることを示している。同様に、Ito (2003) は 1991 年から 2001 年までの介入データを詳細に分析し、この期間の介入の実施方法が通貨当局の介入担当者によって明らかに異なることを示すとともに、1995 年から 2001 年に行われた介入の効果があつたことを実証している。不胎化介入には、シグナリング効果の他にポートフォリオ・バランスを通じた効果がある。Dominguez and Frankel (1993) は、イベントスタディの手法を使ってポートフォリオバランス効果が存在することを確認しているが、通常の介入規模は債券市場規模と比較すれば小さいため、不胎化介入によるポートフォリオ・バランスの変化から生じるリスクプレミアムの変化を実証分析で捉えることは難しいことを示唆している。

上述した 2 つの効果の他に、2000 年代以降はマーケットマイクロストラクチャー理論におけるオーダーフローの効果に注目して為替介入の効果を検証する研究が多い¹。オーダーフローとは、為替市場における市場参加者の買いと売りの差額を集計したものであるが、Evans and Lyons (2001) はオーダーフローを用いた “micro portfolio-balance approach” により、介入がポートフォリオバランスチャンネルを通じて為替レートに与える効果があることを指摘している。オーダーフローに着目した実証分析としては、Evans and Lyons (2005) は Citibank の顧客注文をそれぞれのセグメントに分けて分析することにより、オーダーフローに為替の力があることを示した。また、Osler and Vandrovych (2009) は、Royal Bank of Scotland の取引データを 6 種類の顧客と 4 種類の金融機関に分類して分析することにより、ヘッジファンドなどの投資家のオーダーフローには為替の説明力があり、そのような取引を仲介している金融機関も顧客の注文から情報を得ている可能性のあることを示している。特に、ヘッジファンドなどの一部の金融機関の注文は為替相場に影響力を持つということが徐々に解明されている。中央銀行による為替介入も、こうしたヘッジファンドの注文と同様、あるいはそれ以上の規模で行われているのであれば、為替相場に大きな影響を与えている可能性がある。

周知の通り、日本の財務省は 2003 年 1 月から 2004 年 3 月にかけて大規模な円売り介入を実施した。この時期の介入はおよそ二日に一度という高頻度、かつ一日当りの平均介入金額は 2700 億円、総額では 35 兆円にのぼるといふそれまでに例を見ないものであつた。この大規模介入は、介入している事実を公表しないで実施するという、いわゆる「覆面介入」であつたが、財務省から介入の指示を得た日本銀行は個別の銀行にドル買い注文を出すだけでなく、直接ブローカーにドル買い注文を出すなど様々な手法で実施されていたと言われる。こうした為替市場における大量の「ドル買い」注文の情報が市場参加者の売買取引に影響を与え、その集計としてのオーダーフローの変化がその後の為替相場に影響を与えた可能性は十分にある。

¹オーダーフローについては、Lyons (2006) が詳細に論じている。

本稿の目的は、2003年1月から2004年3月にかけて実施された大規模な為替介入の効果をオーダーフローの概念を用いて、介入金額が当日の為替変化率に与える影響を検証することにある。しかし、計量分析としては当日の介入政策の効果を測る上で二つ大きな問題がある。第一に同日の介入の影響を測るには、Chen et al. (2012) が示すとおり介入の内生性の問題があり、2002年11月までのデータではあるが回帰分析では推定にバイアスが生じるとしている。彼らは、ベイズモデルによるMCMC推定を行っているが、我々はAmemiya (1974) の伝統的な同時方程式モデルに基づいて内生性を考慮し、政策反応式と市場反応式を完全情報最尤推定する。加えて、実際に内生性があるかの検定を行う。第二は、円高傾向にあった時期に、為替の介入が効果的であるかの定義が難しい点である。Fatum and Hutchison (2010) は近年発展が目覚ましい政策評価モデル(Program/Policy Evaluation)に基づいて、もし介入が無かった場合の反事実を比較基準として効果測定している。我々は、構造モデルにおける平均処置効果(ATE; Average Treatment Effect)の導出を試み、構造分析と政策評価モデルの両面から介入効果を分析する。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、2003年から2004年の大規模な為替介入の特徴と専攻研究についてまとめる。3節では、オーダーフローの概説と介入効果の測定を論じる。4節では、計量モデルの統計的推測についてまとめ、これらの詳細は付録に収めた。5節で実証結果を示し、6節が結論である。

2 2003年から2004年の大規模な為替介入の特徴

財務省が2000年8月から日本の外国為替平衡操作の実施状況を公表してから、介入金額の情報をういて日本の為替介入の効果について様々な実証分析が行われてきた。前述のIto (2003) においても、介入金額が介入の大きさを表す説明変数として加えられており、介入金額の大きさが有意に為替相場に影響を与えていることが示されている。同様に、Fatum and Yamamoto (2012) も介入金額が介入の効果を高めているかどうか注目した結果、介入金額の大きさが介入効果に有意な影響を与えていることを確認している。図1は財務省が公表している日本の介入データ(月次合計, Jan 1992 - Mar 2004)である。介入の頻度や金額は、為替相場の推移だけではなく、介入を担当する財務省財務官の方針によっても異なっている(Ito, 2003)。とりわけ、溝口財務官が行った2003年1月から2004年3月の介入は、その他の時期とは類を見ない大規模かつ頻繁な介入であった。図2は、2003年1月から2004年3月の溝口介入の時期における日次の介入データと為替相場の推移を表したものである。特に、日本の財務官と米国の財務次官の名前をとった溝口・テイラー介入といわれる2003年後半から2004年3月には、1日の介入金額が1兆円を越えたり、ほぼ連続で介入が実施されたりしていたことがわかる。これは、当時の貿易黒字による輸出のドル売りに加えて、2003年9月頃のイラク情勢の影響により、海外投資ファンドが巨額の円買い動いていたため、対内資本流入の超過による円買いに対抗するためであったと言われる。しかし、円ドル為替

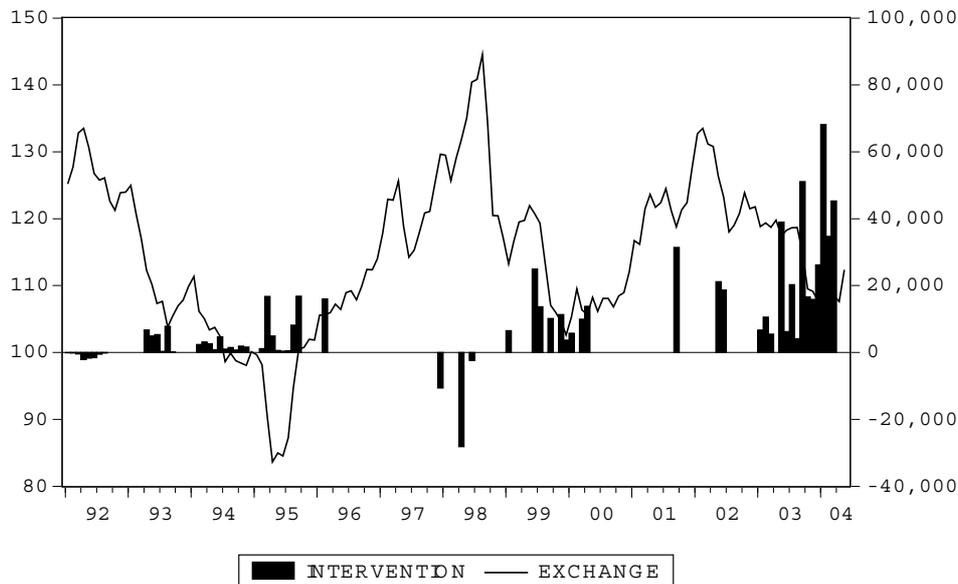


図 1: 介入額 (億円) と円ドル為替レート (月次データ)

相場の推移からもわかるように、積極的な為替介入にもかかわらず⁶2004年2月まで円高トレンドに変化はなかった。特に、2003年9月20日に開催されたG7では、日本の頻繁な介入に対し否定的な意見が報道され、それを受けて市場が急激に円高方向に反応する場面もあった。したがって、この時期の大規模介入が為替相場に効果があったかどうか実証しようとしても、有意な結果を得ることは難しいように見える。事実、Fatum and Hutchison (2010) は政策評価モデルのATEを推定した結果、同期間の介入は為替相場に有意な効果を与えていなかったことを確認した。Ito (2004) もそれ以前の期間 (1995年6月21日から2003年1月13日) と当期間 (2003年1月14日から2004年3月31日) を比較して、介入が為替相場に与える効果が半減していることを示した。一方、財務省の介入情報を一つのオーダーフローとして扱い、為替介入の効果を分析した先行研究では、この時期の為替介入が顧客取引に対して影響を与えていたことを実証している。例えば、Girardin and Lyons (2008) は2003年から2004年まで大規模に実施された日本の為替介入データと同時期のCITIBANKの顧客取引データ (Corporates, Mutual Funds and Hedge Funds) を用いて実証分析した結果、介入が間接的に顧客取引に影響を与えていることを確認した。同様に、Marsh (2011) は2002年から2006年まで実施された財務省が公表している介入データ、Royal Bank of Scotlandの顧客オーダーフローデータを用いて行い、円売り介入が行われた日には顧客の注文が介入と同じ方向に動く傾向があるという結果を得た。しかし、上記の2つの研究が用いている顧客データは一般には観察することが不可能であり、かつ世界の為替市場にお

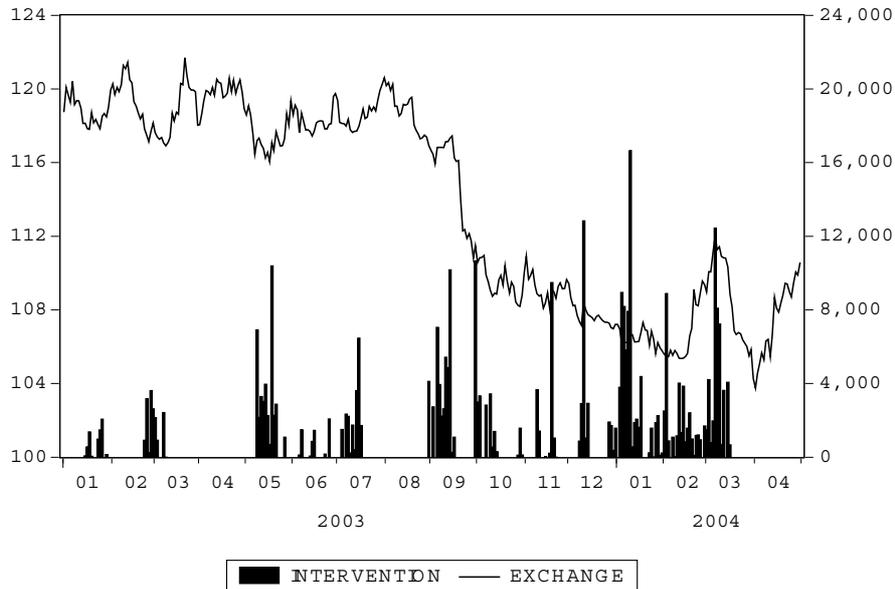


図 2: 介入額 (億円) と円ドル為替レート (日次データ)

いては一部の取引データに過ぎない点に問題がある。

以上から、オーダーフローの考え方に基けばこの時期でも介入が効果的である可能性はあるが、この理論は当日中の介入効果を見るので、為替と介入の同時決定による内生性が無視できない。介入効果に否定的な先行研究もあるが、内生性による推定バイアスは係数や ATE の推定値に大きく影響するので、再検証の価値があるだろう。次節では、介入効果の測定をオーダーフローに基づいて論ずる。

3 介入政策の有効性

本節では、なぜ介入政策が為替水準に影響を与え得るかを考察する。為替介入を含むオーダーフローが個々のトレーディングを通じて他の市場参加者に伝わり、それが価格に反映するまでの課程を Evans and Lyons (2002) と Lyons (2006) に従って概説する。

3.1 オーダーフロー (Lyons, 2006)

Lyons (2006, Ch. 7) に従い、一日の中で顧客がそれぞれのインターバンク・ディーラーに取引の注文を出し、それらが集計されたオーダーフローによってどのように為替相場が形成されていくのかを、以下の 3 期間に分けて考える。

第1ラウンドで、為替を保持することによって得られるリターン R_t が観察される。 R_t は個々の ΔR_τ の合計として、 $R_t = \sum_{\tau=1}^t \Delta R_\tau$ となる。ここで ΔR_τ は公に観察されるマクロ経済の情報を表し、 $\Delta R_\tau \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_R^2)$ などと仮定する。

第2ラウンドで、顧客の注文 C_{it} を持ったディーラーがインターバンク市場でそれらの取引のカバー取引を行いリスクをシェアする。ディーラーは顧客の注文に対して取引相場を提示して実行し、その反対取引をインターバンク市場でカバーする。各々の顧客から注文 C_{it} を受けたディーラーの取引量 T_{it} は、 $T_{it} = \phi_1 C_{it}$ 、 $C_{it} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_c^2)$ と表される。こうして、一日のオーダーフロー X_t は、 n 人のインターバンク・ディーラーのネットの取引 T_{it} の総計として、以下のように表される。

$$X_t = \phi_1 \sum_{i=1}^n C_{it} = \phi_1 C_t \quad (3.1)$$

第2ラウンドの終わりでオーダーフロー X_t が観察されるが、各々のディーラーは第1ラウンドで受け取った顧客の注文 C_{it} からオーダーフロー X_t を推測できる。

第3ラウンドで、ディーラーはオーバーナイトで顧客注文のポジションを持ち越さないための清算取引を行う。ここでディーラーが提示する取引価格は、それまでの顧客注文取引やインターバンク市場での取引で持ち越されたポジションに依存して決まる。以上の設定の下で、 t 日の終わりの為替水準 P_t とその階差は以下で表される。

$$P_t = \psi_1 \sum_{\tau=1}^t \Delta R_\tau + \psi_2 \sum_{\tau=1}^t X_\tau \quad (3.2)$$

$$P_t - P_{t-1} = \psi_1 \Delta R_t + \psi_2 X_t \quad (3.3)$$

(3.2) 式が表すとおり、ディーラー間のオーダーフローが情報伝達に重要な役割を果たすことによって、ディーラーが提示する価格、すなわち為替相場に影響を与える。

3.2 中央銀行の存在と介入効果の測定

この節では Lyons (2006, Ch. 8) の議論を拡張して、介入効果の測定の枠組みを提示する。前述のオーダーフローの中には、顧客取引に加えて中央銀行による介入取引も含まれる。中央銀行が為替介入を銀行に注文する場合に、インターバンク・ディーラーは中央銀行からの注文を受けなかった銀行 i と受けた銀行 j の2種類に分類される。中央銀行の注文を $I_{jt} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_I^2)$ とすると、

$$T_{it} = \phi_1 C_{it}, \quad T_{jt} = \phi_1 (C_{jt} + I_{jt}) \quad (3.4)$$

である。従って、市場全体のオーダーフロー X_t は、 T_{it} と T_{jt} の合計である。

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_i \phi_1 C_{it} + \sum_j \phi_1 (C_{jt} + I_{jt}) \\ &= \phi_1 (\phi_2 I_t + v_t) + \phi_1 I_t \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで $I_t = \sum_j I_{jt}$ が合計介入額となる。2 番目の等式は、Girardin and Lyons (2008) の実証結果に基づいており、介入がその他のオーダーフローに与える影響 $C_t = \phi_2 I_t + v_t$ を用いた。従って、 ϕ_2 は介入のヘッジファンド等に与える間接効果である。このとき為替変化率は

$$\begin{aligned} P_t - P_{t-1} &= \psi_1 \Delta R_t + \psi_2 X_t \\ &= \psi_1 \Delta R_t + \psi_2 (\phi_1 \phi_2 + \phi_1) I_t + u_t \end{aligned} \quad (3.6)$$

ここで、 $u_t = \psi_2 \phi_1 v_t$ は誤差項として扱う。 I_t の係数 $\beta_2 = \psi_2 (\phi_1 \phi_2 + \phi_1)$ は、介入の直接効果と間接効果の和で総合効果となる。オーダーフローの枠組みでは中央銀行は一顧客に過ぎないが、比較的多額の発注額が公表データから観察でき、その他の顧客のオーダーフローに影響を与え得る特異な顧客といえよう。それでも、 β_2 はランダムウォークのノイズの係数なので、介入効果としては意味がやや不明瞭である。

介入効果をより明確に考えたい。 C_{it} や I_{jt} の期待値は一般にゼロでないので、 $v_t \sim \mathcal{N}(\mu_c, \sigma_c^2)$ と $I_t \sim \mathcal{TN}(\mu_I, \sigma_I^2)$ としてみよう、ここでこの時期は介入は常に正 ($I_t \geq 0$) なので切断正規分布となる。このとき、 P_t はドリフト付きランダムウォークになる。

$$P_t = \phi_1 \psi_2 [(\phi_2 \mu_I + \mu_c) + \mu_I] t + \psi_1 \sum_{\tau=1}^t \Delta R_\tau + \psi_2 \sum_{\tau=1}^t X_\tau \quad (3.7)$$

もし $-(\phi_2 \mu_I + \mu_c) < \mu_I$ と勝れば、介入で為替水準は上昇トレンドを生じる²。そこで、介入効果を確定トレンド $\mathcal{E}[\Delta P_t]$ への影響として捉える。現実には介入する日としない日があり、トビットモデルを考える必要がある。また、介入しない場合を比較基準とする ATE としてトレンドの計測を試みる。

最後に総合効果やトレンドの推定に関しては、介入の内生性が問題となる。つまり、当日の介入額 I_t と (3.6) 式の誤差項 u_t には相関の可能性が高い

$$\text{Cor}[I_t, u_t] \neq 0 \quad (3.8)$$

このとき、回帰分析では推定にバイアスが生じる。

内生性については複数の根源が考えられている。仮に (3.5) 式で ϕ_2 がほぼゼロとすれば $v_t = C_t$ であるが、Girardin and Lyons (2008) に拠れば、その他のオーダーフロー C_t と介入 I_t は相関していると考え得る。これは C_t を観察していないことによる、欠落変数バイアスを生じさせる。Chen et al. (2012) は日内取引を考え、日時データに集計することで内生性が生じ、OLS の集計バイアスを示した。

²Girardin and Lyons (2008) は、CITIBANK の顧客データに基づいて、中央銀行の介入注文、Corporates、Hedge Fund、Mutual Fund のそれぞれの注文データを扱っているが、2003 年 1 月から 2004 年 3 月までの期間において介入額を除く顧客注文の平均値はマイナスになっていると報告している。

また、Ito (2003) にもあるように I_t を外生変数と見なせるかも疑問である。この時期の介入の特徴は、連続して多額の介入が行われていたことだが、これは介入当局が、介入当日までの為替相場の動きを観察し、それに応じて介入するか否か、さらに介入金額をいくらにするかの反応式があったと考えられる。このとき2本の同時方程式モデルとなり、いわゆる同時方程式バイアスが生じる。次節で、我々は標準的な同時方程式モデルで内生性を考慮し、内生性が存在するかの検証も行うが、これらは本稿の貢献と考え得る。

4 同時方程式トービットモデルの統計的推測

4.1 計量モデル

この節では計量モデルの記法を用いて、前述の考察に従い期間 ($t = 1, \dots, T$) における2本の構造式を考える。

$$y_t^{(1)*} = \beta_1 y_t^{(2)} + \gamma_1' z_t^{(1)} + u_t^{(1)} \quad (4.9)$$

$$y_t^{(1)} = \begin{cases} y_t^{(1)*} & \text{if } y_t^{(1)*} > 0 \\ 0 & \text{if } y_t^{(1)*} \leq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

$$y_t^{(2)} = \beta_2 y_t^{(1)} + \gamma_2' z_t^{(2)} + u_t^{(2)} \quad (4.11)$$

ここで、 $y_t^{(1)} = I_t$ は円売り (ドル買い) 介入額で、 $y_t^{(2)} = \Delta P_t = P_t - P_{t-1}$ はドル/円為替レートの変化分を表しており、ふたつの内生変数がある。 $(z_t^{(1)}, z_t^{(2)})$ は操作変数ベクトルを表す。例えばドリフト項たる定数項や米日金利差の階差 $\Delta R_t = \Delta(i_t^* - i_t)$ を外生変数とし、先決変数として $(y_{t-1}^{(1)}, y_{t-1}^{(2)}, y_{t-2}^{(1)}, y_{t-2}^{(2)}, \dots)$ などを $(z_t^{(1)}, z_t^{(2)})$ は含んでいる。

第1構造式たる (4.9) 式と (4.10) 式は当局の反応式であり、為替変化 $y_t^{(2)}$ に当日中に反応し介入する可能性を許している。潜在変数 $y_t^{(1)*}$ が閾値を超えたときのみ正值の介入額が観察されるが、この時期は円買い介入は一切なく、円売り介入しか起きないのでこの定式化が合っている。一方、第2構造式の (4.11) 式は為替市場の反応式であるが、介入が起きない日 ($y_t^{(1)} = 0$) は影響を受けない。図3は、操作変数を所与としたときの内生変数の関係であり、ここでは β_2 が介入の総合効果に当たる。ドル/円為替レートであることに注意すると、円高になると当局の円売り介入額が増加すると考えられ β_1 の想定符号は正、円売介入が市場で円安を引き起こすならば β_2 の想定符号は負である。

図3の均衡点あるいは観察可能な誘導型は、もし条件 $(1 - \beta_1 \beta_2) > 0$ が成立すれば存在し、Nelson and Olson (1978) のように次で与えられる。

$$y_t^{(1)} = (\pi_1' z_t + v_t^{(1)}) w_t \quad (4.12)$$

$$y_t^{(2)} = (\pi_2' z_t + v_t^{(2)}) w_t + (\gamma_2' z_t^{(2)} + u_t^{(2)})(1 - w_t) \quad (4.13)$$

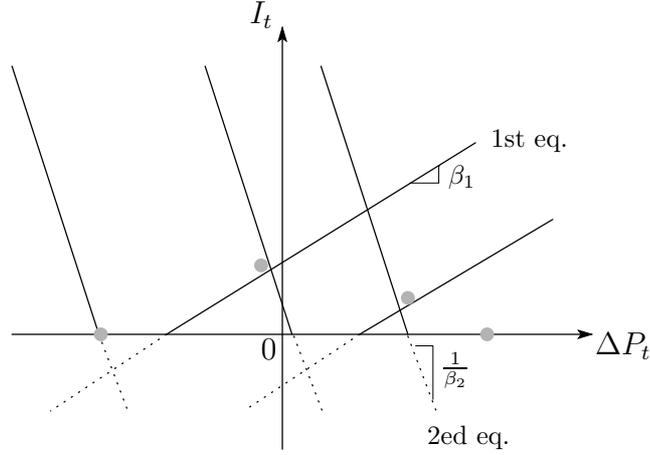


図 3: 同時方程式トービットモデル

ここで、誘導型係数と誤差項 $\mathbf{v}_t = (v_t^{(1)}, v_t^{(2)})'$ は、選択行列 $\mathbf{J}^{(1)}, \mathbf{J}^{(2)}$ を用いて操作変数ベクトルを $\mathbf{z}_t^{(1)} = \mathbf{J}^{(1)}\mathbf{z}_t$, $\mathbf{z}_t^{(2)} = \mathbf{J}^{(2)}\mathbf{z}_t$ とすると

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \pi_1' \\ \pi_2' \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_1' \mathbf{J}^{(1)} \\ \gamma_2' \mathbf{J}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} u_t^{(1)} \\ u_t^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

で与えられる。また、 w_t は $w_t = \mathbb{I}\{y_t^{(1)*} > 0\} = \mathbb{I}\{\pi_1' \mathbf{z}_t + v_t^{(1)} > 0\}$ であり、引数が真のとき 1、その他で 0 となる指示関数である。よって、介入が起きる ($w_t = 1$) か否か ($w_t = 0$) で、誘導型がスイッチ回帰モデルになっている。

我々はこの計量モデルが Amemiya (1974) で提唱されている同時方程式トービットモデルの特殊形であることに着目した。連立不等式であるため、均衡解が存在するための整合条件 (Coherence condition) と呼ばれる $|\mathbf{B}| = (1 - \beta_1\beta_2) > 0$ が、前提となることを Amemiya(1974) は発見した。我々の想定符号からは、幸いにもこの条件が満たされる。

4.2 一致推定量と識別

図 2 の通り介入は毎日起きない、つまり内生変数 $y_t^{(1)}$ が 0 で検閲されるトービットモデルなので OLS 推定では選択バイアスが生じる。そして同時方程式モデルでもあるので、図 3 の均衡点を回帰分析してもそれは第 1 構造式や第 2 構造式のどちらでもない。

2 本の構造式を同時に推定する完全情報最尤 (FIML; full information maximum likelihood) 推定量は、Amemiya (1974) によって定義されており有効推定量である。 $(y_t^{(1)*}, y_t^{(2)})$ の密度関数を f とし、2 次元正規分布 $(u_t^{(1)}, u_t^{(2)})' \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$, $\Sigma =$

$(\sigma_1^2, \sigma_{12}; \sigma_{12}, \sigma_2^2)$ の密度関数を g と表すと、期間 t の尤度関数は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
l_t &= \left[f(y_t^{(1)}, y_t^{(2)}) \right]^{w_t} \left[\int_{-\infty}^0 f(y^{(1)*}, y_t^{(2)}) dy^{(1)*} \right]^{(1-w_t)} \\
&= \left[(1 - \beta_1 \beta_2) g(y_t^{(1)} - \beta_1 y_t^{(2)} - \gamma_1' z_t^{(1)}, y_t^{(2)} - \beta_2 y_t^{(1)} - \gamma_2' z_t^{(2)}) \right]^{w_t} \\
&\quad \times \left[\int_{-\infty}^{-\beta_1 y_t^{(2)} - \gamma_1' z_t^{(1)}} g(u^{(1)}, y_t^{(2)} - \gamma_2' z_t^{(2)}) du^{(1)} \right]^{(1-w_t)} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Maddala (1983, Ch. 7) によると第2構造式 (4.11) における構造母数は、第1構造式が (4.10) 式で検閲されることで識別が強まり、常に識別される。一方で第1構造式 (4.9) は、線形同時方程式モデルにおける通常のゼロ制約を必要とする。第1構造式に現れない操作変数としては、理論上は介入が不胎化されていると $Cor[I_t, \Delta R_t] = 0$ なので、米日金利差などを考えた。

FIML 推定における尤度関数は、積分表現があるので最大化に工夫を要した。今回我々は直交変換を用いた1次元の標準正規分布関数による表現を用いたが、その具体的な尤度関数と導出は付録に収めている。

4.3 構造変化の検定

今回用いた標本は、2003年1月1日から2004年4月28日までの日次データである。2003年9月20日にG7が開催されるにあたり、開催前日まで米国、日本、ドイツの三ヶ国で実務者会議が行われた。その際日本の頻繁な介入に対し否定的な意見があり、図2の様にそれを受けて市場が急激に円高方向に反応した。よって、2003年9月19日から22日は為替レート変動に強い外生要因があると考え、この期間を分析から省いた。推定に先立ち、この前後に構造変化があるのではないかと考えた。

前期の構造母数 $(\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \Sigma)$ を $K \times 1$ ベクトル θ_{03} で表し、同様に後期を θ_{04} と表す。また帰無仮説 $H_0 : \theta_{03} = \theta_{04}$ を $\mathbf{R}(\theta'_{03}, \theta'_{04})' = \mathbf{0}$ で表現する、ここで $\mathbf{R} = [\mathbf{I}_K, -\mathbf{I}_K]$ である。前期と後期の FIML 推定量 $(\hat{\theta}_{03}, \hat{\theta}_{04})$ に対して、それぞれの漸近共分散行列の推定量を $(\hat{\mathbf{V}}_{03}, \hat{\mathbf{V}}_{04})$ としよう。このとき、Wald 型の検定統計量 q は以下で与えられる。

$$q = \mathbf{e}'(\mathbf{R}\hat{\mathbf{V}}\mathbf{R}')^{-1}\mathbf{e} \xrightarrow{d} \chi^2(K) \quad (4.16)$$

ここで、 T_1, T_2 をそれぞれ前期と後期の標本数とすれば

$$\mathbf{e} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \sqrt{T_1} \hat{\theta}_{03} \\ \sqrt{T_2} \hat{\theta}_{04} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_{03} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \hat{\mathbf{V}}_{04} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

である。

4.4 内生性の検定統計量

我々は介入額と為替変化率が (4.9) 式と (4.11) 式から、同時に決定されると想定した。この場合一般には $y_t^{(1)}$ と $y_t^{(2)}$ が構造型の誤差項と相関するが、パラメータの値によっては相関が弱い時もあるので検証が必要である。例えばもし $y_t^{(1)*}$ が観察できて、三角体型 ($\beta_1 = 0$) かつ $\sigma_{12} = 0$ ならば $Cor[y_t^{(1)*}, u_t^{(2)}] = 0$ となり、内生性の問題はない。こうした場合、(4.9) 式は通常のトービット推定、(4.11) 式は最小 2 乗法により一致推定ができる。

第 1 構造式で内生性が無いとする帰無仮説を $H_0^{(1)} : \mathcal{E}[y_t^{(2)} u_t^{(1)}] = 0$ とし、第 2 構造式も同様に $H_0^{(2)} : \mathcal{E}[y_t^{(1)} u_t^{(2)}] = 0$ とする。内生性の特定化検定は Hausman (1978) や Wooldridge (2006; Ch. 6) に基づく残差回帰で行われるが、内生変数が検閲されている誘導型では適用できない。そこで、帰無仮説の標本対応にあたる検定統計量を提案する。

$$z_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{T}\hat{\sigma}_{(1)}} \sum_{t=1}^T (\hat{\beta}_2 y_t^{(1)} \hat{u}_t^{(1)} + \hat{\sigma}_{12}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.18)$$

$$z_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{T}\hat{\sigma}_{(2)}} \sum_{t=1}^T y_t^{(1)} \hat{u}_t^{(2)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.19)$$

導出は付録に収めるが、帰無仮説の下でこれらの z 検定量は標準正規分布に従うので両側検定を行う。

4.5 同時方程式トービットの決定係数

トービットモデルの決定係数については Veall and Zimmermann (1996) のサーベイ論文があり、種々の議論がされている。今回我々は観察される 2 つの誘導型に対して、次の分散比を考えた。

$$0 \leq \frac{\mathcal{V}ar[\mathcal{E}[y_t^{(g)} | \mathbf{z}_t]]}{\mathcal{V}ar[y_t^{(g)}]} = 1 - \frac{\mathcal{V}ar[\epsilon_t^{(g)}]}{\mathcal{V}ar[y_t^{(g)}]} \leq 1, \quad g = 1, 2 \quad (4.20)$$

ここで、分子の条件付き期待値と $\epsilon_t^{(g)} = y_t^{(g)} - \mathcal{E}[y_t^{(g)} | \mathbf{z}_t]$ は無相関であるから、通常の間帰分析の決定係数と同じ解釈ができるのが利点である。 \mathbf{z}_t を所与とした $y_t^{(1)} = 0$ を含む条件付き期待値は以下となる。

$$\mathcal{E}[y_t^{(1)} | \mathbf{z}_t] = (\boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{z}_t) \Phi\left(\frac{\boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{z}_t}{\omega_1}\right) + \omega_1 \phi\left(\frac{\boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{z}_t}{\omega_1}\right) \geq 0 \quad a.s. \quad (4.21)$$

$$\mathcal{E}[y_t^{(2)} | \mathbf{z}_t] = \beta_2 \mathcal{E}[y_t^{(1)} | \mathbf{z}_t] + \gamma'_2 \mathbf{z}_t^{(2)} \quad (4.22)$$

ここで、 $\omega_1^2 = \mathcal{V}ar[v_t^{(1)}]$ 、 Φ と ϕ はそれぞれ標準正規分布関数とその密度関数を表す。これらは (4.21) 式と (4.22) 式の誘導型母数を (4.14) 式の関係から推定でき、

予測量をそれぞれ $\hat{y}_t^{(g)}$ ($g = 1, 2$) と表そう。このとき決定係数 $R_{(g)}^2$ は

$$R_{(g)}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{y}_t^{(g)} - \bar{\hat{y}}_t^{(g)})^2}{\sum_{t=1}^T (y_t^{(g)} - \bar{y}_t^{(g)})^2}, \quad g = 1, 2 \quad (4.23)$$

ここで、 $\bar{y}_t^{(g)}$ と $\bar{\hat{y}}_t^{(g)}$ は、それぞれ $y_t^{(g)}$ と $\hat{y}_t^{(g)}$ の標本平均である。 \mathbf{z}_t は殆ど先決変数から成るので、前日までの情報で介入額と為替収益率がどれほど予測できるかを意味する。

4.6 同時方程式トービットの ATE と VTE

近年 Fatum and Hutchison (2010) のように介入政策に対しても、政策評価モデルにおける平均処置効果 (ATE; Average Treatment Effect) を測ることが試みられている。ただし我々のモデルでは、通常とは異なる 3 つの論点に留意する。

第 1 に、動学的な時系列分析であるから、当日の政策反応と介入政策ダミー ($y_t^{(2)}, w_t$) は、過去の ($y_{t-1}^{(2)}, w_{t-1}, y_{t-2}^{(2)}, w_{t-2}, \dots$) のすべてに依存する。Blackwell and Glynn (2014) の議論の様に 2^T 通りの政策の歴史のうち、ある 2 つの歴史を比較するのが厳密な分析となるだろう。Angrist et al. (2013) は AR(1) 構造のモデルの移動平均表現で政策の系列を評価しているが、我々のモデルではかなり煩雑である。そこで、Blackwell and Glynn (2014) は、前日までは同一の系列を辿った如何なる政策で、当日 (t 期) のみ政策の有無が異なる政策を比較する瞬時的な ATE (CET; Cotemporaneous Effect of Treatment) を定義している。今回の分析では、これを当日における ATE を呼ぶこととしたい。このとき、当日の介入の有無が為替変化率に効果があるかという政策評価モデルでの定式化は

$$y_t^{(2)} = y_{1t}^{(2)} w_t + y_{0t}^{(2)} (1 - w_t) \quad (4.24)$$

と簡潔である。 $y_{1t}^{(2)}$ と $y_{0t}^{(2)}$ はそれぞれ、介入が起きた時と起きなかった時の政策反応で、一方が観察でき片方は反事実 (counterfactual) となる。我々はまず、誘導型 (4.13) 式がこの (4.24) 式と同値であることに着目する。つまり、 $y_{1t}^{(2)} = \pi_2' \mathbf{z}_t + v_t^{(2)}$ と $y_{0t}^{(2)} = \gamma_2' \mathbf{z}_t + u_t^{(2)}$ で与えられる。

第 2 の論点として、ATE である $\mathcal{E}[y_{1t}^{(2)} - y_{0t}^{(2)}]$ の推定において、政策 $w_t = \mathbb{I}\{\pi_1' \mathbf{z}_t + v_t^{(1)} > 0\}$ も内生変数なのが問題である。一般に仮定される Rosenbaum and Rubin (1983) の条件付き独立性は、傾向スコアマッチング法などの前提である。 $(y_{1t}^{(2)}, y_{0t}^{(2)}, w_t)$ はすべて誤差項にも依存し、この条件を満たせない。他方、同時方程式を考えたので、内生変数は操作変数と誤差項に関して解けている利点に注意すれば、ATE は容易に推定できる。

$$\text{ATE} = \pi_2' \mathcal{E}[\mathbf{z}_t] - \gamma_2' \mathcal{E}[\mathbf{z}_t^{(2)}] \quad (4.25)$$

故に、当日の ATE の定常性から標本平均 $\bar{z}_t = (1/T) \sum_{t=1}^T z_t$ を用いて一致推定できる。

しかしさらに、このモデルは (4.10) 式の潜在変数 $y_t^{(1)*} < 0$ を含むことに用心しなければならない。第 3 点として、ATE は必ずしも適切な評価基準にならない。付録には、ATE の有用な別表現である以下の導出を示している。

$$y_{1t}^{(2)} - y_{0t}^{(2)} = \beta_2(\pi_1' z_t + v_t^{(1)}) \quad (4.26)$$

$$\mathcal{E}[y_{1t}^{(2)} - y_{0t}^{(2)}] = \beta_2 \mathcal{E} \left[y_t^{(1)} \mathbb{I}\{y_t^{(1)*} > 0\} + \frac{1}{1 - \beta_1 \beta_2} y_t^{(1)*} \mathbb{I}\{y_t^{(1)*} \leq 0\} \right] \quad (4.27)$$

$y_t^{(1)*} < 0$ は仮想的な円買い介入となり、 $\beta_2 < 0$ ならば円売り介入と円買い介入はどちらも効果的だが、ATE はそれらを平均化により相殺する。これは、Imbens and Angrist (1994) における Local ATE の単調性の議論と同様である。そもそも図 1 の負の領域における仮想的な円買い介入は実現せず、介入しない $y_t^{(1)} = 0$ に置き換わるので ATE では不適切であろう。

そこで、介入額が正である円売り介入の効果を区別して評価する必要がある。これは、Wooldridge (2006; Ch. 18) にあるとおり、近年重要視される政策を実施した日の平均処置効果 (ATE₁; ATE on the treated) で対応が可能である。(4.12) 式と (4.26) 式から ATE₁ である $\alpha_1 = \mathcal{E}[y_{1t}^{(2)} - y_{0t}^{(2)} | w_t = 1]$ は、

$$\text{ATE}_1 = \beta_2 \mathcal{E}[y_t^{(1)} | w_t = 1] \quad (4.28)$$

となる。この一致推定量は $\hat{\alpha}_1 = (\hat{\beta}_2 \sum_t y_t^{(1)} w_t) / \sum_t w_t$ と容易である。また、より関心のある介入した日にもし介入しなかった場合の為替トレンド $E[y_{0t}^{(2)} | w_t = 1] = \alpha_{01}$ は、次の表現をもつ。

$$\alpha_{01} = \mathcal{E} \left[\gamma_2' z_t^{(2)} + \frac{\sigma_{12} + \beta_1 \sigma_2^2}{(1 - \beta_1 \beta_2) \omega_1} \frac{\phi(\pi_1' z_t)}{\Phi(\pi_1' z_t)} \middle| w_t = 1 \right] \quad (4.29)$$

よって、この標本平均から推定もできるのだが、次のように簡潔に推定ができる。 $\alpha_{11} = \mathcal{E}[y_{1t}^{(2)} | w_t = 1] = \mathcal{E}[y_t^{(2)} | w_t = 1]$ は $\hat{\alpha}_{11} = \sum_t y_t^{(2)} w_t / \sum_t w_t$ とできて、 $\hat{\alpha}_1$ から逆算すると

$$\hat{\alpha}_{01} = \hat{\alpha}_{11} - \hat{\alpha}_1 \quad (4.30)$$

である。 α_{01} が正であれば円売り介入はその増価トレンドを相殺する、いわゆる leaning against the wind 型と解釈できよう。もし負であれば増価トレンドに乗じる leaning with the wind 型である。帰無仮説 $H_0 : \alpha_1 = \alpha_{11} - \alpha_{01} = 0$ に対する t 検定量のデルタ法を用いた導出は、付録に収めた。

副次的な関心として、為替変化率のボラティリティを検証する。企業の輸出行動の観点からボラティリティが小さい方が望ましいだろう。従来は Dominguez (1998) のように GARCH 分析がなされるところだが、以下では政策評価の定式化の枠組

みで考える。処置の有無による分散の差 $\mathcal{V}ar[y_{1t}^{(2)}] - \mathcal{V}ar[y_{0t}^{(2)}]$ を考える。ここでは、これを VTE (the difference of the variances due to the treatment) と呼ぶことにしたい。処置効果の分散 $\mathcal{V}ar[y_{1t}^{(2)} - y_{0t}^{(2)}]$ とは、意味合いが異なる点に注意する。ATE₁ と同様に VTE₁ (VTE on the treated) を、次で提案する。

$$VTE_1 = \sigma_{11}^2 - \sigma_{01}^2 \quad (4.31)$$

ここで、 $\sigma_{11}^2 = \mathcal{V}ar[y_{1t}^{(2)} | w_t = 1]$ と $\sigma_{01}^2 = \mathcal{V}ar[y_{0t}^{(2)} | w_t = 1]$ である。故に VTE₁ が負ならば、介入した日はもししなかった場合をベンチマークとして、分散が減少する。(4.26) 式と $\mathcal{V}ar[y_{1t}^{(2)} | w_t = 1] = \mathcal{V}ar[y_t^{(2)} | w_t = 1]$ から

$$\sigma_{11}^2 = \beta_2^2 \mathcal{V}ar[y_t^{(1)} | w_t = 1] + 2\beta_2 \mathcal{C}ov[y_t^{(1)}, y_{0t}^{(2)} | w_t = 1] + \sigma_{01}^2 \quad (4.32)$$

VTE₁ の想定符号は、(4.32) 式の第 1 項と第 2 項の大小関係に依存して自明ではない。VTE₁ の推定量と帰無仮説 $H_0 : \sigma_{11}^2 = \sigma_{01}^2$ に対する t 検定量は、付録に収めた。

5 実証分析

5.1 分析モデル

今回分析するモデルの説明変数は前述の Ito (2003) や Evans and Lyons (2002) を参考にしている。2 本の構造式の特定化は以下の通りである。

$$I_t^* = \beta_1 \Delta P_t + \gamma_{10} + \gamma_{11} \Delta P_{t-1} + \gamma_{12} \Delta P_{t-2} + \gamma_{13} I_{t-1} + \gamma_{14} I_{t-2} + \gamma_{15} \Delta P_{t-3:7} + \gamma_{16} \Delta P_{t-8:30} + u_t^{(1)}, \quad (5.33)$$

$$I_t = \begin{cases} I_t^* & \text{if } I_t^* > 0 \\ 0 & \text{if } I_t^* \leq 0, \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\Delta P_t = \beta_2 I_t + \gamma_{20} + \gamma_{21} \Delta R_t + \gamma_{22} \Delta P_{t-1} + \gamma_{23} \Delta P_{t-2} + \gamma_{24} I_{t-1} + \gamma_{25} I_{t-2} + \gamma_{26} I_{t-7} + \gamma_{27} I_{t-30} + u_t^{(2)}, \quad (5.35)$$

ここで、 I_t は t 期における円売りドル買い介入額 (単位：兆円) であり、 $\Delta P_t = (P_t - P_{t-1}) \times 100$ は為替の対数値の階差としているので、ほぼ為替レートの % 変化率である。為替レートはドル/円為替レートであり、NYclose 18 時点をを用いている。

我々は、 t 期間中の $y_t^{(1)} = I_t$ と $y_t^{(2)} = \Delta P_t$ の同時性に着目しているので、期間 t を明確にする必要がある。図 4 に示すとおり、本稿で当日と呼ぶ期間は、前日のニューヨーク市場の取引終了から翌日の取引終了時点までである。故に当日介入額 I_t とは、東京やニューヨークやその他の市場へ対する、この期間中の介入合計額を想定している。

その他の変数は操作変数であり、 $\Delta R_t = \Delta(i_t^* - i_t)$ は米日金利差 (米 O/N - 日 O/N) の階差である。当局の反応式 (5.33) の先決変数に関して、 $\Delta P_{t-s:u} = (P_{t-s} -$

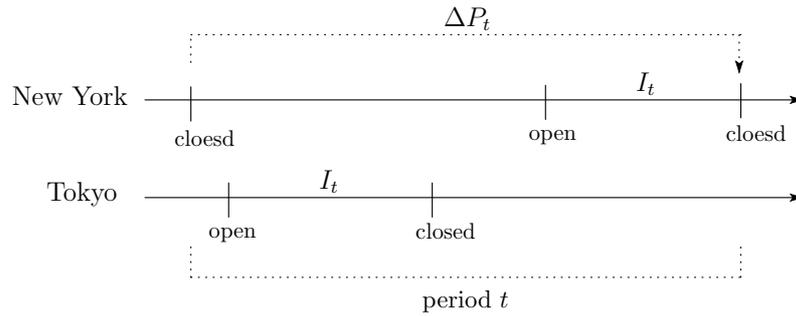


図 4: 期間 t の定義

$P_{t-u}) \times 100$ は、3 日前から 7 日前までや 8 日前から 30 日前までの累積変化率を表している。数値シミュレーションを行ったところ、1 期と 2 期前の変数のみでは少額の介入がほぼ毎日発生したため、図 2 と合わない。当局が中期的な為替水準の変化も視野に入れていると想定して含めることとした。

5.2 推定と検定結果

今回我々が推定に用いたのは、2003 年 1 月 1 日から 2004 年 4 月 28 日までの日次データ ($T_1 = 187, T_2 = 157$) であり、介入数は前期で 55 日、後期で 74 日である。なお、2003 年 9 月 19 日から 22 日は為替レート変動に強い外生要因があると考えられるため、今回の分析では省いている。構造変化の検定は、検定量が $q = 36.9$ となり、 $\chi^2(20)$ の 95% 点が 31.4 なので、5% 有意水準で帰無仮説を棄却した。よって、前期と後期の FIML 推定 ($\hat{\theta}_{03}, \hat{\theta}_{04}$) の結果を分けて、表 1 にまとめた。整合条件 $(1 - \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2) > 0$ も満たされ、同時方程式トービットモデルは成立し得る。内生性の検定については、前期で $z_{(1)} = -0.01$ と $z_{(2)} = 2.37$ となり、後期で $z_{(1)} = 0.07$ と $z_{(2)} = 1.44$ となった。つまり第 1 構造式は内生性がないと判断でき、第 2 構造式は内生性が生じている可能性が高いので FIML 推定を行う必要がある。

まず、注目すべき結果は第 2 構造式の介入の総合効果 β_2 である。為替介入による同日中の影響は想定符号通りマイナスであり、前後期ともに係数の中で最も有意、かつその係数の大きさも、前日以前の介入効果に比べて最大である。推定された係数を基に 1 兆円の介入の効果を考えてみると、前期で約 1.6% の円の減価、後期で約 1% の減価の効果が期待されることになる。図 2 から当時の円/ドル為替レートが 1 ドル=100 円強であるので、1 兆円の円売りにより、1 円以上の円安誘導が実施できたと言えるだろう。

内生性の影響について、検定量 $z_{(2)}$ の符号から OLS は上方バイアスが予想される。実際、第 2 構造式を OLS 推定すると前期で $\tilde{\beta}_2 = -0.52$ と後期で $\tilde{\beta}_2 = -0.43$ であり、FIML 推定値は前期で $\hat{\beta}_2 = -1.59$ と後期で $\hat{\beta}_2 = -1.05$ なので、2 倍から 3 倍にもなる。Chen et al. (2012) も 2002 年 11 月までの期間ではあるが、介入の効果

表 1: FIML の推定結果

	'03/1/1 ~ '03/9/18		'03/9/23 ~ '04/4/28	
	Dep. var.= I_t	Dep. var.= ΔP_t	Dep. var.= I_t	Dep. var.= ΔP_t
ΔP_t	0.21 (0.29)		0.16 (0.39)	
I_t		-1.59*** (-3.69)		-1.05*** (-2.59)
const.	-0.49 (-1.02)	0.10** (2.06)	-0.22* (-1.78)	0.13* (1.77)
ΔR_t		-0.14 (-0.24)		0.48 (0.32)
ΔP_{t-1}	0.36 (1.00)	-0.06 (-0.78)	0.17* (1.93)	0.07 (0.80)
ΔP_{t-2}	0.22 (1.43)	0.12 (1.56)	-0.04 (-0.47)	-0.16* (-1.84)
I_{t-1}	0.83 (1.36)	0.38 (1.37)	0.67*** (4.10)	0.56** (2.45)
I_{t-2}	0.68* (1.84)	0.66** (2.34)	0.29 (1.57)	-0.06 (-0.31)
$\Delta P_{t-3:7}$	0.16 (1.22)		-0.04 (-1.08)	
$\Delta P_{t-8:30}$	0.06 (1.01)		-0.01 (-0.45)	
I_{t-7}		-0.66** (-2.36)		0.17 (1.14)
I_{t-30}		-0.18 (-0.58)		-0.38** (-2.40)
σ_1, σ_2	0.36 (1.45)	0.49*** (15.5)	0.45*** (3.42)	0.55*** (13.1)
σ_{12}		0.05 (0.49)		0.05 (0.44)
ATE ₁		-0.385*** (-3.758)		-0.309** (-2.283)
$\hat{\alpha}_{11}, \hat{\alpha}_{01}$	0.002	0.387	0.018	0.327
VTE ₁		-0.074 (-0.381)		-0.116 (-0.517)
obs.		187		157
$1 - \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2$		1.33		1.02
$z_{(1)}, z_{(2)}$	-0.01	2.38	-0.50	1.35
$R_{(1)}^2, R_{(2)}^2$	0.42	0.0816	0.25	0.06

1) 括弧内は t 値である。***, **, * は、それぞれ 1%, 5%, 10%水準で有意を示す。

2) 第 1 構造式に現れない操作変数は、 $\Delta R_t, I_{t-7}, I_{t-30}$ である。

が約 1.7%と推定しており、内生性の影響で OLS の約 2 倍以上としている。期間は異なるが、同様の結果になったのは興味深い。

第 2 構造式のその他の変数については、日米金利差が有意でないがゼロ金利政策の影響と考えられよう。オーダーフローによる価格形成の理論に拠れば、当日中の介入額のみ影響を与え得る。しかしこの時期実際には、1 日前や 2 日前の介入額がプラスに有意である。これは、例えば円売り介入が実施された時に、円売りドル買いのポジションを翌日以降に持ち越したディーラーが利食い取引を行っている、という動きを捉えたものと解釈することもできる。すなわち、為替介入が為替相場に与える影響は一様ではなく、為替介入のオーダーフローを認識したディーラーがそれに乗じて作ったオーバーナイトのポジションの利食い取引を翌日以降に行うことにより、時として介入方向とは反対の相場変動を誘発してしまう可能性があるということを示唆するものである。

決定係数 $R_{(2)}^2$ はほぼゼロで、為替の変動は前日までの為替変化率や介入では予測できず、当日のオーダーフローがほぼ説明している。介入した場合のトレンドあるいは ATE_1 については、当日の介入が大きく影響する。前期で $\hat{\alpha}_{11} = 0.002(\%)$ と後期で $\hat{\alpha}_{11} = 0.018(\%)$ なので、介入した日には円の増価トレンドはほぼゼロにしている。例えば、図 2 において 2003 年 9 月から 2004 年 2 月までの 111 日間、日次の平均変化率は約 0.042% のオーダーで、1 ドル 110 円から 105 円 ($\approx 110 \times (1 - 0.0004)^{111}$) の円高となった。もし介入が無ければ $\hat{\alpha}_{01}$ は前期と後期でともに 0.3% を超えている推定結果である。つまり、介入した日は円高傾向が強かった日であり、結果的にはそれをほぼ相殺している。後期では完全には相殺できていないが、円高の速度はかなり弱められたといえよう。ボラティリティについて標準偏差でみると、前期で $(\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{01}) = (0.33, 0.43)$ と、後期で $(\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{01}) = (0.45, 0.57)$ となる。介入により減少してはいるが、 VTE_1 の t 値から有意な差はなく、ボラティリティ減少の効果は付随していなかった。

他方、第 1 構造式の当局の反応式においては、決定係数がある程度大きく反応式があるとみなせて³、前日までの情報で当日の介入がある程度予測できた。着目すべきは、 β_1 が前後期ともにゼロと有意には異ならないという結果であり、当局は当日の為替の動きに反応して介入金額を決めていたとは統計的推測からは言えない。従って同時方程式モデルは、当局の反応式が自律的な三角体型と見なせて、第 1 構造式については Ito (2003) の反応関数における推定結果と同等と言えよう。これら結果は、動学的トービットモデルの性質を考えると、前日以前に潜在変数 $y_t^{(1)*} = I_t^*$ が高まり介入政策の姿勢に入ると、当日の為替変動の如何によらず介入に踏み切り、ある程度継続して為替介入を実施していたとも解釈できる。このことは図 2 の為替介入が連続的に実施されていたという事実と整合的である。

³ $\beta_1 = 0$ と見なせば、通常のトービット推定もできる。推定値はほぼ変わらないが、有限標本ではトービット推定の方がより多くの変数が有意となる。

6 結論

本稿の目的は、2003年1月から2004年3月にかけて日本の当局が実施した大規模な為替介入の効果について検証を試みることであった。なぜ介入が効果を持ち得るかについては、為替のオーダーフローの枠組みに基づき、為替水準への影響は平均的なトレンドへの影響として捉えることを提示した。当日の介入額の限界効果は構造推定に基づき、一方で推計期間のトレンド分析は政策評価モデルによって両面から考察した。同時方程式トービットモデルの推定結果は概ねオーダーフロー理論と整合的であり、総合効果は約1兆円のドル買い介入で、即日1%以上の円安誘導が出来たという実証結果である。また介入額の決定は、政策反応式に基づく内生的な政策であることが示唆され、平均処置効果の分析によると当日の円高トレンドをほぼ相殺しようとする介入姿勢であったことを示唆するものである。為替変化率のボラティリティへの影響は見られないので、介入の第一義の目的が平均的なトレンドに向けられていたと解釈できよう。むしろ結果的にはこの時期円高が進んだわけであるが、もし介入政策が無かった場合に比して円高の速度はかなり弱められていたと云え、この意味で政策効果があったと結論する。

参考文献

- [1] Amemiya, T. (1974), "Multivariate Regression and Simultaneous Equation Models when the Dependent Variables Are Truncated Normal," *Econometrica*, Vol. 42, 999-1012.
- [2] Blackwell, M and A. Glynn (2014), "How to Make Causal Inferences with Time-Series Cross-Sectional Data," *Working Paper*.
- [3] Angrist, J. D., O. Jordà and G. Kuersteiner (2013), "Semiparametric Estimates of Monetary Policy Effects: String Theory Revisited," *NBER Working Paper*, No. 19355.
- [4] Chen, C., T. Watanabe and T. Yabu (2012), "A New Method for Identifying the Effects of Foreign Exchange Interventions," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 44, 1507-1533.
- [5] Dominguez, K. M. (1998), "Central Bank Intervention and Exchange Rate Volatility," *Journal of International Money and Finance*, Vol. 17, 161-190.
- [6] Dominguez, K. M. and A. J. Frankel (1993), "Does Foreign Exchange Intervention Matter? Disentangling the Portfolio and Expectations Effects for the Mark," *NBER Working Paper*, No. 3299.

- [7] Doornik, J. A. (2002), *Object-Oriented Matrix Programming using Ox*, Timberlake Consultants Press and Oxford.
- [8] Evans, M. D. D. and R. K. Lyons (2001), "Portfolio Balance, Price Impact, and Secret Intervention," *NBER Working Paper*, No. 8356.
- [9] Evans, M. D. D. and R. K. Lyons (2002), "Order flow and exchange-rate dynamics." *Journal of Political Economy*, Vol. 110, 170-180.
- [10] Evans, M. D. D. and R. K. Lyons (2005), "Understanding Order Flow," *NBER Working Paper*, No. w11748.
- [11] Fatum, R. and M. M. Hutchison (2010), "Evaluating Foreign Exchange Market Intervention: Self-selection, Counterfactuals and Average Treatment Effects," *Journal of International Money and Finance*, Vol. 29, 570-584.
- [12] Fatum, R. and Y. Yamamoto (2012), "Does Foreign Exchange Intervention Volume Matter?," *Federal Reserve Bank of Dallas Globalization and Monetary Policy Institute Working Paper*, No. 115.
- [13] Girardin, E. and R. K. Lyons (2008), "Does Intervention Alter Private Behavior?," *Working Paper*.
- [14] Hausman, J. A. (1978), "Specification Tests in Econometrics," *Econometrica*, Vol. 46, 1251-1271.
- [15] Imbens, G. W. and J. D. Angrist (1994), "Identification and Estimation of Local Average Treatment Effects," *Econometrica*, Vol. 62, 467-475.
- [16] Ito, T. (2003), "Is Foreign Exchange Intervention Effective? The Japanese Experiences in the 1900s," in Paul Mizen(ed.) *Monetary History, Exchange Rates and Financial Markets*, Ch. 5, Edward Elgar, 126-153.
- [17] Ito, T. (2004), "The Yen and the Japanese Economy, 2004," in C. F. Bergsten and J. Williamson (eds.) *Dollar Adjustment: How Far? Against What?*, Institute for International Economics, Washington D.C.
- [18] Jurgensen, P. (1983), "Report of the Working Group on Exchange Market Intervention [Jurgensen Report]," *DC:US Treasury Dept*
- [19] Lyons, R. K. (2006), *The Microstructure Approach to Exchange Rates*, The MIT Press; New Edver.
- [20] Maddala, G. S. (1983), *Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, Cambridge.

- [21] Marsh, W. I. (2011), “Order Flow and Central Bank Intervention: An Empirical Analysis of Recent Bank of Japan Actions in the Foreign Exchange Market,” *Journal of International Money and Finance*, Vol. 30, 377-392.
- [22] Nelson, F. and Olson, L. (1978), “Specification and Estimation of a Simultaneous-Equation Model with Limited Dependent Variables,” *International Economic Review*, Vol. 19, 695-705.
- [23] Osler, C. and V. Vandroych, (2009), “Hedge Funds and the Origins of Private Information in Currency Markets,” presented at the Third Annual Microstructure Workshop, Emerging Markets Group, Cass Business School, London, May 1, 2009.
- [24] Rosenbaum, P. R. and D. B. Rubin (1983), “The Central Role of the Propensity Score in Observational Studies for Causal Effects,” *Biometrika*, Vol. 70, 41-55.
- [25] Veall, M. R. and Zimmermann, K. F. (1996), “Pseudo-R2 Measures for Some Common Limited Dependent Variable Models,” *Journal of Economic Surveys*, Vol. 10, 241-259.
- [26] Wooldridge, J. M. (2006), *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*, The MIT Press.
- [27] 渡辺努 (1992), “為替介入のシグナル効果：日本に関する実証分析”, 日本銀行金融研究所「金融研究」, 第11巻第4号

付録

尤度関数の導出：尤度関数 (4.15) 式を 1 次元正規分布の累積分布関数で表現したい。最大化の計算は Ox (Doornik, 2002) を用いている。 t 期の尤度関数は以下となる。

$$l_t = \left[\frac{(1 - \beta_1 \beta_2)}{(2\pi)^{\frac{2}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{u}'_{1t} \Sigma^{-1} \mathbf{u}_{1t} \right) \right]^{w_t} \left[\int_{-\infty}^{u_{1t}} g(u^{(1)}, u_t^{(2)}) du^{(1)} \right]^{(1-w_t)} \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $\mathbf{u}_{1t} = (y_t^{(1)} - \beta_1 y_t^{(2)} - \gamma_1' \mathbf{z}_t^{(1)}, y_t^{(2)} - \beta_2 y_t^{(1)} - \gamma_2' \mathbf{z}_t^{(2)})'$ と $u_{1t} = -\beta_1 y_t^{(2)} - \gamma_1' \mathbf{z}_t^{(1)}$ である。以下の誤差項の直交変換を考える。

$$y_t^{(1)*} = \beta_1 y_t^{(2)} + \gamma_1' \mathbf{z}_{t-1}^{(1)} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} u_t^{(2)} + (u_t^{(1)} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} u_t^{(2)}), \quad (\text{A.2})$$

ここで、 $u_t^{(1)*} = u_t^{(1)} - (\sigma_{12}/\sigma_2^2)u_t^{(2)}$ に対して $\text{Cov}[u_t^{(1)*}, u_t^{(2)}] = 0$ なので、 $u_t^{(1)*}$ は $u_t^{(2)}$ と独立である。 $(u_t^{(1)*}, u_t^{(2)})$ から $(u_t^{(1)}, u_t^{(2)})$ への変数変換のヤコビアンは 1 である。このとき (A.1) の第 2 項は、 $w_t = 0$ のとき以下に書き換えられる。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{u_{1t} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} u_{2t}^{(2)}} g(u^{(1)*}, u_t^{(2)}) du^{(1)*} &= \left(\int_{-\infty}^{(u_{1t} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} u_{2t})/\sigma_*} \phi\left(\frac{u^{(1)*}}{\sigma_*}\right) d\left(\frac{u^{(1)*}}{\sigma_*}\right) \right) \frac{1}{\sigma_2} \phi\left(\frac{u_{2t}}{\sigma_2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{u_{1t} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} u_{2t}}{\sigma_*}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{u_{2t}^2}{2\sigma_2^2}\right) \end{aligned}$$

ここで、 $u_{2t} = y_t^{(2)} - \gamma_2' z_t^{(2)}$ 並びに $\sigma_*^2 = \sigma_1^2 - (\sigma_{12}^2/\sigma_2^2)$ である。以上から対数尤度関数 $\log L = \sum_t \log l_t$ は、 $(1 - \beta_1\beta_2) > 0$ ならば具体的には以下となる。

$$\begin{aligned} \log L &= \sum_{t=1}^T w_t \left[\log(1 - \beta_1\beta_2) - \log 2\pi - \log |\Sigma|^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{1t}' \Sigma^{-1} \mathbf{u}_{1t} \right] \\ &+ (1 - w_t) \left[\log \Phi\left(\frac{u_{1t} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} u_{2t}}{\sigma_*}\right) - \log \sqrt{2\pi} - \log \sigma_2 - \frac{u_{2t}^2}{2\sigma_2^2} \right] \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

内生性の検定統計量の導出：(4.18) 式と (4.19) 式を導出する。ここでは構造方程式を、以下で表す。

$$y_t^{(1)*} = \beta_1 y_t^{(2)} + \gamma_1' z_t^{(1)} + u_t^{(1)} = \theta_1' \mathbf{x}_t^{(1)} + u_t^{(1)}, \quad (\text{A.4})$$

$$y_t^{(2)} = \beta_2 y_t^{(1)} + \gamma_2' z_t^{(2)} + u_t^{(2)} = \theta_2' \mathbf{x}_t^{(2)} + u_t^{(2)}, \quad (\text{A.5})$$

はじめに、第 2 構造式の検定量 (4.19) 式から考える。残差を $\hat{u}_t^{(2)} = y_t^{(2)} - \hat{\theta}_2' \mathbf{x}_t^{(2)}$ とする、ここで $\hat{\theta}_2$ は $(\beta_2, \gamma_2)'$ は FIML 推定量である。

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t y_t^{(1)} \hat{u}_t^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t y_t^{(1)} u_t^{(2)} - \left[\frac{1}{T} \sum_t y_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)'} \right] \sqrt{T} (\hat{\theta}_2 - \theta_2) \quad (\text{A.6})$$

続いて $\sqrt{T}(\hat{\theta}_2 - \theta_2)$ を漸近的線形の表現に戻す。対数尤度関数を $l(\theta) = \sum_t l_t(\theta)$ と表す、ここで $\theta = (\theta_1', \theta_2', \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})'$ は $((p_1 + p_2 + 3) \times 1)$ ベクトルである。スコア関数を $s_t = s_t(\theta) = \partial l_t(\theta) / \partial \theta$ とすると、最尤法の議論から

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) = -\mathbf{H}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t s_t \right] + o_p(1) \quad (\text{A.7})$$

ここで、 $\mathbf{H} = (1/T) \sum_t \mathbf{H}_t(\theta)$ はヘッセ行列である。選択行列 \mathbf{J}_2 を $\mathbf{J}_2 \theta = \theta_2$ とすると、 $\sqrt{T}(\hat{\theta}_2 - \theta_2) = \sqrt{T} \mathbf{J}_2 (\hat{\theta} - \theta)$ なので、(A.6) 式は

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t y_t^{(1)} u_t^{(2)} + \mathbf{m}'_{2T} \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t s_t \right] + o_p(1) \quad (\text{A.8})$$

ここで、 $\mathbf{m}'_{2T} = \mathbf{m}'_{2T}(\boldsymbol{\theta}) = [(1/T) \sum_t y_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)'}] \mathbf{J}_2 \mathbf{H}^{-1}$ である。この確率極限を \mathbf{m}_2 と表すと、帰無仮説 $H_0^{(2)}$ の下で次が成り立つ。

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t y_t^{(1)} \hat{u}_t^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t (y_t^{(1)} u_t^{(2)} + \mathbf{m}'_2 \mathbf{s}_t) + o_p(1) \quad (\text{A.9})$$

$$\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{(2)}^2) \quad (\text{A.10})$$

ここで、 $\sigma_{(2)}^2 = \mathcal{E}[(y_t^{(1)} u_t^{(2)} + \mathbf{m}'_2 \mathbf{s}_t)^2]$ となる。この一致推定量を $\hat{\sigma}_{(2)}^2 = (1/T) \sum_t (y_t^{(1)} \hat{u}_t^{(2)} + \mathbf{m}'_{2T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{s}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}))^2$ として、標準化することで (4.19) 式を得る。

次に、第1構造式の検定量 (4.18) 式を考える。(4.11) の構造式から $\mathcal{E}[y_t^{(2)} u_t^{(1)}] = \beta_2 \mathcal{E}[y_t^{(1)} u_t^{(1)}] + \sigma_{12}$ を得る。 $y_t^{(1)} u_t^{(1)} = y_t^{(1)} (y_t^{(1)} - \boldsymbol{\theta}'_1 \mathbf{x}_t^{(1)}) w_t$ に注意して、残差を $\hat{u}_t^{(1)} = (y_t^{(1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}'_1 \mathbf{x}_t^{(1)}) w_t$ とする。このとき、次の表現を得る。

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t (\hat{\beta}_2 y_t^{(1)} \hat{u}_t^{(1)} + \hat{\sigma}_{12}) \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t (\beta_2 y_t^{(1)} u_t^{(1)} + \sigma_{12}) - \frac{1}{T} \begin{bmatrix} -\sum_t -\beta_2 y_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ -\sum_t y_t^{(1)} u_t^{(1)} \\ -\sum_t 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_1) \\ \sqrt{T}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) \\ \sqrt{T}(\hat{\sigma}_{12} - \sigma_{12}) \end{bmatrix} \\ - (\hat{\beta}_2 - \beta_2) \left[\frac{1}{T} \sum_t y_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(1)'} \right] \sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_1) \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t (\beta_2 y_t^{(1)} u_t^{(1)} + \sigma_{12}) - \boldsymbol{\mu}'_{1T} \mathbf{J}_1 \sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) + o_p(1) \quad (\text{A.13})$$

ここで、(A.12) 式の第3項は漸近的に無視できる。また $\boldsymbol{\mu}_{1T} = \boldsymbol{\mu}_{1T}(\beta_2, u_t^{(1)})$ は $((p_1 + 1 + 1) \times 1)$ ベクトルで、 \mathbf{J}_1 は $(\boldsymbol{\theta}'_1, \beta_2, \sigma_{12})' = \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\theta}$ とする選択行列である。(A.8) 式や (A.9) と同様の議論から、仮説 $H_0^{(1)}$ の下で次が成り立つ。

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t (\hat{\beta}_2 y_t^{(1)} \hat{u}_t^{(1)} + \hat{\sigma}_{12}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_t (\beta_2 y_t^{(1)} u_t^{(1)} + \sigma_{12} + \mathbf{m}'_1 \mathbf{s}_t) + o_p(1) \\ \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_{(1)}^2) \quad (\text{A.14})$$

ここで、 \mathbf{m}'_1 は $\mathbf{m}'_{1T}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\mu}'_{1T} \mathbf{J}_1 \mathbf{H}^{-1}$ の確率極限であり、 $\sigma_{(1)}^2 = \mathcal{E}[(\beta_2 y_t^{(1)} u_t^{(1)} + \sigma_{12} + \mathbf{m}'_1 \mathbf{s}_t)^2]$ となる。この一致推定量を

$$\hat{\sigma}_{(1)}^2 = \frac{1}{T} \sum_t (\hat{\beta}_2 y_t^{(1)} \hat{u}_t^{(1)} + \hat{\sigma}_{12} + \mathbf{m}'_{1T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{s}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}))^2 \quad (\text{A.15})$$

ここで、 $\mathbf{m}'_{1T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{\boldsymbol{\mu}}'_{1T} \mathbf{J}_1 \mathbf{H}^{-1}$ 並びに $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{1T} = \boldsymbol{\mu}_{1T}(\hat{\beta}_2, \hat{u}_t^{(1)})$ である。これで標準化することで (4.18) 式を得る。

ATE₁ と VTE₁ の統計量の導出：はじめに (4.26) 式と (4.27) 式を考える。(4.14) 式の関係から $u_t^{(2)} = v_t^{(2)} - \beta_2 v_t^{(1)}$ なので

$$\begin{aligned} y_{1t}^{(2)} - y_{0t}^{(2)} &= \frac{\beta_2}{1 - \beta_1\beta_2} \gamma_1' \mathbf{z}_t^{(1)} + \frac{1}{1 - \beta_1\beta_2} \gamma_2' \mathbf{z}_t^{(2)} + v_t^{(2)} - (\gamma_2' \mathbf{z}_t^{(2)} + u_t^{(2)}) \\ &= \frac{\beta_2}{1 - \beta_1\beta_2} \gamma_1' \mathbf{z}_t^{(1)} + \frac{\beta_1\beta_2}{1 - \beta_1\beta_2} \gamma_2' \mathbf{z}_t^{(2)} + \beta_2 v_t^{(1)} \\ &= \beta_2 (\boldsymbol{\pi}_1' \mathbf{z}_t + v_t^{(1)}) \end{aligned}$$

潜在変数 $y_t^{(1)*}$ が負の時の誘導型は、 $y_t^{(2)} = 0 + \gamma_2' \mathbf{z}_t^{(2)} + u_t^{(2)}$ を (4.9) 式に代入して、 $y_t^{(1)*} = (1 - \beta_1\beta_2)(\boldsymbol{\pi}_1' \mathbf{z}_t + v_t^{(1)}) \leq 0$ を得る。故に、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_1' \mathbf{z}_t + v_t^{(1)} &= (\boldsymbol{\pi}_1' \mathbf{z}_t + v_t^{(1)}) w_t + (\boldsymbol{\pi}_1' \mathbf{z}_t + v_t^{(1)})(1 - w_t) \\ &= y_t^{(1)} w_t + \frac{1}{1 - \beta_1\beta_2} y_t^{(1)*} (1 - w_t) \end{aligned}$$

次に、(4.28) 式の t 検定を考える。3 × 1 ベクトルを $\boldsymbol{\theta}_3 = (\beta_2, \mu_1, p_1)'$ と置く、ここで $\mu_1 = \mathcal{E}[y_t^{(1)}]$ と $p_1 = \mathcal{E}[w_t]$ である。 $\hat{\mu}_1 = (1/T) \sum_t y_t^{(1)}$ と $\hat{p}_1 = (1/T) \sum_t w_t$ の一致推定量と (A.9) 式の結果から、 $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3 - \boldsymbol{\theta}_3) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{V}_3)$ である。この漸近共分散行列の一致推定量は、以下で与えられる。

$$\hat{\mathbf{V}}_3 = \frac{1}{T} \sum_t \mathbf{e}_{3t} \mathbf{e}_{3t}', \quad \mathbf{e}_{3t} = (\hat{\epsilon}_t, y_t^{(1)} - \hat{\mu}_1, w_t - \hat{p}_1) \quad (\text{A.16})$$

ここで、 $\hat{\epsilon}_t = -\mathbf{e}_2' \mathbf{H}^{-1} \mathbf{s}_t$ で、 \mathbf{e}_2 は $\beta_2 = \mathbf{e}_2' \boldsymbol{\theta}$ とする選択ベクトルである。 $\hat{\alpha}_1 = (\hat{\beta}_2 \hat{\mu}_1) / \hat{p}_1$ なので、デルタ法を用いて評価する。 $f(\boldsymbol{\theta}_3) = (\theta_1 \theta_2) / \theta_3$ に対して、 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_3) = \partial f(\boldsymbol{\theta}_3) / \partial \boldsymbol{\theta}_3 = (\theta_2 / \theta_3, \theta_1 / \theta_3, -(\theta_1 \theta_2) / \theta_3^2)'$ となる。 $\mu_1 / p_1 \neq 0$ より $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_3) \neq \mathbf{0}$ なので分布は退化せず、帰無仮説 $H_0 : f(\boldsymbol{\theta}_3) = 0$ に対する t 検定量は次で与えられる。

$$t = \frac{\sqrt{T} f(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)}{\sqrt{\mathbf{f}'(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3) \hat{\mathbf{V}}_3 \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_3)}} \quad (\text{A.17})$$

続いて (4.29) 式の α_{01} を表現する。 $\alpha_{01} = \mathcal{E}[\mathcal{E}[\gamma_2' \mathbf{z}_t^{(2)} + u_t^{(2)} | \mathbf{z}_t, w_t = 1] | w_t = 1]$ であり、Maddala (1983, Appendix) の議論を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\gamma_2' \mathbf{z}_t^{(2)} + u_t^{(2)} | \mathbf{z}_t, w_t = 1] &= \gamma_2' \mathbf{z}_t^{(2)} - \frac{\mathcal{E}[v_t^{(1)} u_t^{(2)}]}{\omega_1^2} \omega_1 \mathcal{E} \left[\frac{-v_t^{(1)}}{\omega_1} \middle| \frac{-v_t^{(1)}}{\omega_1} < \frac{\boldsymbol{\pi}_1' \mathbf{z}_t}{\omega_1} \right] \\ &= \gamma_2' \mathbf{z}_t^{(2)} + \frac{\sigma_{12} + \beta_1 \sigma_2^2}{(1 - \beta_1 \beta_2) \omega_1} \frac{\phi(\boldsymbol{\pi}_1' \mathbf{z}_t)}{\Phi(\boldsymbol{\pi}_1' \mathbf{z}_t)} \end{aligned}$$

ここで、 $\mathcal{E}[u_t^{(2)} | -v_t^{(1)}] = -(\mathcal{E}[v_t^{(1)} u_t^{(2)}] / \omega_1^2) (-v_t^{(1)})$ と $\mathcal{E}[v_t^{(1)} u_t^{(2)}] = (\sigma_{12} + \beta_1 \sigma_2^2) / (1 - \beta_1 \beta_2)$ を用いた。

最後に、(4.31) 式の VTE_1 推定量を導出する。 $\mathcal{V}ar[y_{1t}^{(2)}|w_t = 1] = \mathcal{V}ar[y_t^{(2)}|w_t = 1]$ と $\mathcal{V}ar[y_t^{(2)}|w_t = 1] = \mathcal{E}[y_t^{(2)2}|w_t = 1] - (\mathcal{E}[y_t^{(2)}|w_t = 1])^2$ の関係から

$$\hat{\sigma}_{11}^2 = \frac{1}{\sum_t w_t} \sum_t y_t^{(2)2} w_t - (\hat{\alpha}_{11})^2 \quad (A.18)$$

を得る。(4.26) 式から $\mathcal{V}ar[y_{0t}^{(2)}|w_t = 1] = \mathcal{V}ar[y_t^{(2)} - \beta_2 y_t^{(1)}|w_t = 1]$ なので

$$\hat{\sigma}_{01}^2 = \frac{1}{\sum_t w_t} \sum_t (y_t^{(2)} - \hat{\beta}_2 y_t^{(1)})^2 w_t - (\hat{\alpha}_{01})^2 \quad (A.19)$$

とできる。従って、 VTE_1 の一致推定量 $(\hat{\sigma}_{11}^2 - \hat{\sigma}_{01}^2)$ を得る。

続いて t 値を求める。 VTE_1 は次でも表される。

$$\hat{\sigma}_{11}^2 - \hat{\sigma}_{01}^2 = 2\hat{\beta}_2 \left[\frac{\hat{m}_{12}}{\hat{p}_1} - \frac{\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2}{\hat{p}_1 \hat{p}_1} \right] - \hat{\beta}_2^2 \left[\frac{\hat{m}_1^2}{\hat{p}_1} - \left(\frac{\hat{\mu}_1}{\hat{p}_1} \right)^2 \right] \quad (A.20)$$

ここで、 $\hat{m}_1^2 = (1/T) \sum_t y_t^{(1)2}$, $\hat{m}_{12} = (1/T) \sum_t y_t^{(1)} y_t^{(2)}$ 並びに $\hat{\mu}_2 = (1/T) \sum_t y_t^{(2)} w_t$ である。故にデルタ法で評価する。 6×1 ベクトルを $\theta_4 = (\beta_2, \mu_1, p_1, m_1^2, m_{12}, \mu_2)$ と置く、ここで $m_1^2 = \mathcal{E}[y_t^{(1)2}]$, $m_{12} = \mathcal{E}[y_t^{(1)} y_t^{(2)}]$, $\mu_2 = \mathcal{E}[y_t^{(2)} w_t]$ である。 $g(\theta_4) = 2\theta_1[\theta_5/\theta_3 - \theta_2\theta_6/\theta_3^2] - \theta_1^2[\theta_4/\theta_3 - (\theta_2/\theta_3)^2]$ に対して、 $g(\theta_4) = \partial g(\theta_4)/\partial \theta_4$ は以下となる。

$$g(\theta_4) = \begin{bmatrix} 2(\theta_5 - \theta_1\theta_4)\theta_3^{-1} - 2(\theta_1\theta_2^2 - \theta_2\theta_6)\theta_3^{-2} \\ 2(\theta_1^2\theta_2 - \theta_1\theta_6)\theta_3^{-2} \\ (\theta_1^2\theta_4 - 2\theta_1\theta_5)\theta_3^{-2} - 2(\theta_1^2\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2\theta_6)\theta_3^{-3} \\ -\theta_1^2\theta_3^{-1} \\ 2\theta_1\theta_3^{-1} \\ -2\theta_1\theta_2\theta_3^{-2} \end{bmatrix} \quad (A.21)$$

(A.16) 式に対応する推定量は、 $\hat{V}_4 = (1/T) \sum_t e_{4t} e'_{4t}$, ここで $e'_{4t} = (e'_{3t}, y_t^{(1)2} - \hat{m}_1^2, y_t^{(1)} y_t^{(2)} - \hat{m}_{12}, y_t^{(2)} w_t - \hat{\mu}_2)$ である。 $\beta_2 \neq 0$ は $g(\theta_4) \neq 0$ の十分条件で、 t 検定量は $t = \sqrt{T}g(\hat{\theta}_4)/[g'(\hat{\theta}_4)\hat{V}_4g(\hat{\theta}_4)]^{1/2}$ となる。